2. Logika – výroková logika *(MP leden 2010)*

Jazyk

Výrokový jazyk nad $\mathbf{P}$ tvoří

- neprázdná množina $\mathbf{P}$ prvkovýroků,
- logické spojky $\neg, \rightarrow$.

Formule

Výroky či *výrokové formule* nad $\mathbf{P}$ jsou dezignátory $D(F_{\mathbf{P}})$, kde

$$F_{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \cup \{\neg, \rightarrow\}.$$

$VF_{\mathbf{P}}$ značí množinu všech výroků nad $\mathbf{P}$. *Výroková teorie* nad $\mathbf{P}$ je množina $T \subseteq VF_{\mathbf{P}}$ a její prvky se nazývají *axiomy*.

Výrok je *literál*, je-li to prvovýrok nebo negace prvovýroku. Disjunkce literálů se nazývá *klauzule*. Konjunkce literálů se nazývá *elementární klauzule*.

Normální tvary

Výrok je v disjunktivně normálním tvaru, je-li to disjunkce konjunkcí literálů. Výrok je v konjunktivně normálním tvaru, je-li to konjunkce disjunkcí literálů.

Model

Pravdivostní ohodnocení $\mathbf{P}$ = *model výrokového jazyka nad* $\mathbf{P}$ je funkce $v \in {}^{\mathbf{P}}2$. *Hodnota* $\overline{v}(\varphi)$ *výroku* φ *z* $VF_{\mathbf{P}}$ *v ohodnocení* v je hodnota φ v $F_{\mathbf{P}}$-struktuře

$$\langle 2, v(p), -_1, \rightarrow_1 \rangle_{p \in \mathbf{P}}.$$

Říkáme, že v *je model* φ, jestliže $\overline{v}(p) = 1$, tedy φ platí (je splněno) ve v.

Dále v *je model teorie* $T \subseteq VF_{\mathbf{P}}$, když je modelem každého axiomu T, což značíme $v \models T$.

Pro $T \subseteq VF_{\mathbf{P}}$ je $M^{\mathbf{P}}(T)$ *třída všech modelů teorie* T

$$M^{\mathbf{P}}(T) = \{v \in {}^{\mathbf{P}}2 \mid v \models T\}.$$

Sémantická ekvivalence

Buď $T \subseteq VF_{\mathbf{P}}$. Formule φ, ψ z $VF_{\mathbf{P}}$ jsou T*-símanticky ekvivalentní* $\varphi \sim_T \psi$, když platí

$$M^{\mathbf{P}}(T, \varphi) = M^{\mathbf{P}}(T, \psi).$$

Pravdivost v teorii

Formule φ je *pravdivá v teorii* T, platí-li v každém modelu v teorie T. $T \models \varphi$

Formule φ je *lživá v teorii* T, neplatí-li v žádném modelu teorie T. $T \models \neg\varphi$

Formule φ je *nezávislá v teorii* T, není-li pravdivá ani lživá v T.

Formule φ je *konzistentní s teorií* T *(splnitelná v* T*)* není-li lživá v T.

Formule φ je *silnější než* ψ *v teorii* T a ψ je *slabší* než φ, když $T \models \varphi \rightarrow \psi$.

Množinu všech pravdivých $\mathbf{P}$-formulí v T značíme $\Theta_{\mathbf{P}}(T)$.

Množinu všech lživých $\mathbf{P}$-formulí v T značíme $\Theta'_{\mathbf{P}}(T)$.

Ekvivalentní teorie

Teorie S je *extenze teorie* T, když $\mathbf{P}(T) \subseteq \mathbf{P}(S)$ a $\Theta(T) \subseteq \Theta(S)$.

Je-li $\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}(S)$, je to *jednoduchá extenze*.

Teorie T je ekvivalentní S, je-li každá z nich extenzí druhé.

Axiomatizovatelnost

Teorie je *konečně axiomatizovatelná*, je-li ekvivalentní teorii s konečně axiomy.

Množina $K \subseteq {}^{\mathbf{P}}2$je *axiomatizovatelná*, resp. *konečně axiomatizovatelná*, když existuje teorie, resp. konečná teorie T taková, že $K = M(T)$.

Kompletní teorie

Teorie T je *kompletní*, jestliže má model a pro každou formuli φ jejího jazyka platí $T \models \varphi$ nebo $T \models \neg\varphi$, tedy T nemá nezávislý výrok.

(Sémantická kompaktnost)

Věta 2.1.13 *Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.*

Elementární konjunkce, otevřené a uzavřené množiny

Pro funkci $\sigma \subseteq \mathbf{P} \times 2$ značíme $\tilde{\sigma} = \{v \in {}^{\mathbf{P}}2 \mid \sigma \subseteq v\}$.

Pro konečnou funkci $\sigma \subseteq \mathbf{P} \times 2$ je *elementární konjunkce určená* σ formule ε_σ

$$\bigwedge_{p \in \mathrm{dom}(\sigma)} p^{\sigma(p)}.$$

Platí $M(\varepsilon_\sigma) = \tilde{\sigma}$.

Buď $K \subseteq {}^{\mathbf{P}}2$. Řekneme, že $v \in {}^{\mathbf{P}}2$ je *oddělené od* K, když existuje $\sigma \subseteq v$ konečné s $\tilde{\sigma} \cap K = \emptyset$.

Dále K je *uzavřená*, když K obsahuje každé v, které není oddělení od K.

K je *otevřená*, je-li její komplement uzavřená.

K je *obojetná*, jsou-li ona i její komplement uzavřené.

Dedukce

Předpoklady dedukce představují mimologické axiomy teorie T a logické axiomy. *Logické axiomy* LAx jsou dány schematy formulí:

- (PL1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
- (PL2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
- (PL3) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

Pravidlo dedukce je *pravidlo odloučení*, neboli *modus ponens* (MP)

z φ a $\varphi \to \psi$ odvoď ψ.

Důkaz

Důkaz v T je {MP}-odvození t $T\cup$ LAx.

Je to *důkaz formule*, která je jeho posledním členem.

Teorém a vyvratitelná formule

Formule φ je *dokazatelná v T* = je *teorémem T*, existuje-li její důkaz v T. $T \vdash \varphi$.

Formule φ je *vyvratitelná v T*, když $T \vdash \neg\varphi$.

Množinu všech teorémů teorie T značíme $Thm(T)$. Je to tedy {MP}-uzávěr $T \cup$ LAx.

Speciálně jsou teorémy T definovány induktivními pravidly:

1. Každý axiom teorie T a každý logický axiom je teorém teorie T.
2. Jsou-li $\varphi, \varphi \to \psi$ teorémy teorie T, je ψ teorém teorie T.

Bezesporná teorie

Teorie T je *sporná*, je-li v ní dokazatelná každá formule. Jinak je *bezesporná*.

(Existence modelu bezesporné teorie)

Tvrzení 2.2.3

1) (O korektnosti) *Každá v T dokazatelná formule je v T pravdivá.*
2) *Má-li teorie model, je bezesporná.*

Tvrzení 2.2.4

1) $\vdash \varphi \to \varphi$.
2) (O dedukci) $T, \psi \vdash \varphi \Leftrightarrow T \vdash \psi \to \varphi$.

Tvrzení 2.2.5

a) $\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ a $\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$ a $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$
b) $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ a $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$
c) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$
d) $\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$
e) $\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \psi$

(Věta o úplnosti výrokové logiky)

Tvrzení 2.2.6 *Buďte φ, ψ formule teorie T.*

1)
   a) *Teorie T je sporná, právě když je v ní dokazatelný spor.*
   b) (Důkaz sporem) $T, \neg\varphi$ *je sporná* $\Leftrightarrow T \vdash \varphi$.

2) *Buď T maximální bezesporná teorie. Pak platí:*
   a) $T \vdash \varphi \Leftarrow \varphi \in T \Leftarrow T, \varphi$ *je bezesporná.*
   b) $\varphi \in T \Leftarrow \neg\varphi \notin T$ *a také platí* $\varphi \to \psi \in T \Leftarrow \neg\varphi \in T$ *nebo* $\psi \in T$.
   c) *Ohodnocení v takové, že ($v(p) = 1 \Leftrightarrow p \in T$ pro každý prvovýrok p), je jediný model T.*

3) *Bezesporná teorie má maximální bezesporné rozšíření v témže jazyce.*

4) (O existenci modelu) *Teorie má model, právě když je bezesporná.*
5) (O kompaktnosti) *Teorie má model, právě když každá její konečná podteorie má model.*
6) (O úplnosti) $T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \models \varphi$ *platí pro každou teorii* T *a její podformuli* φ.

Syntaktické metody dokazování – především 2.2.9

Vlastnost, že každá formule z S je dokazatelná v T, značíme symbolem $T \vdash S$. Znamená to, že $S \subseteq \mathrm{Thm(T)} \Leftrightarrow \mathrm{Thm(S)} \subseteq \mathrm{Thm(T)}$.

Platí *tranzitivita dedukce* $T \vdash S$ a $S \vdash S' \Rightarrow T \vdash S'$.

Speciálním případem je *tranzitivita* $\rightarrow$

$$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ a } T \vdash \psi \rightarrow \psi' \Rightarrow T \vdash \varphi \rightarrow \psi'$$

.

Tvrzení 2.2.9

1) $\varphi \mathbin{\&} \psi \vdash \varphi, \psi \quad \text{a} \quad \varphi, \psi \vdash \varphi \mathbin{\&} \psi$
2) $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \varphi\} \quad \text{a} \quad \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \varphi\} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$
3) $T \vdash \varphi \mathbin{\&} \psi \quad \Leftrightarrow \quad T \vdash \varphi \text{ a } T \vdash \psi$
4) $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \quad \Leftrightarrow \quad T \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ a } T \vdash \psi \rightarrow \varphi$
5) (Pravidlo tranzitivity $\leftrightarrow$) $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ a $T \vdash \psi \quad \Rightarrow \quad \chi \Leftrightarrow T \vdash \varphi \leftrightarrow \chi$

Tvrzení 2.2.10

Syntakticky jsou dokazatelné: idempotence &, komutativita &, asociativita &, reflexivita $\leftrightarrow$*, symetrie* $\leftrightarrow$ *a idempotence* $\neg$.

Tvrzení 2.2.11

Syntakticky jsou dokazatelné následující ekvivalence:

1) $(\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\ldots(\varphi_n \rightarrow \psi)\ldots))) \quad \leftrightarrow \quad ((\varphi_1 \mathbin{\&} \varphi_2 \mathbin{\&} \ \ldots \ \mathbin{\&} \varphi_n) \rightarrow \psi)$
2) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \quad \leftrightarrow \quad ((\varphi \rightarrow \psi) \mathbin{\&} (\psi \rightarrow \varphi))$
3) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \quad \leftrightarrow \quad (\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$

Tvrzení 2.2.12 (O ekvivalenci)

Vznikne-li formule φ' *z* φ *nahrazením některého výskytu podformule* ψ *formulí* ψ'*, tak*

$$\vdash \quad \psi \leftrightarrow \psi' \quad \rightarrow \quad \varphi \leftrightarrow \varphi'$$
$$T \models \psi \leftrightarrow \psi' \quad \Rightarrow \quad T \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$$

Tvrzení 2.2.13

Syntaktiky jsou dokazatelné: de Morganovy vztahy, idempotence $\vee$*, komutativita* $\vee$*, asociativita* $\vee$.

Dále jsou syntakticky dokazatelné: pravidlo rozbor případů, distributivnost $\vee$ a & a další.

Booleovská pravidla