1. Logika – úvod *(MP leden 2010)*

F-uzávěr $\mathbf{F}\langle X\rangle$

$\mathbf{F}$-*uzávěr* X je nejmenší $\mathbf{F}$-uzavřená nadmnožina X.

F-uzavřená

X je $\mathbf{F}$-uzavřená, když obsahuje svoji $\mathbf{F}$-konkluzi, neboli $\mathbf{F}\lceil X\rceil \subset X$.

F-konkluze $\mathbf{F}\lceil X\rceil$

$\mathbf{F}$-*konkluze* X je množina $\bigcup\{F\lceil X\rceil \mid F \in \mathbf{F}\}$. Tedy v $\mathbf{F}\lceil X\rceil$ jsou právě prvky $F(x_1,\dots,x_n)$ s $\langle x_1,\dots,x_n\rangle \in X^n \cap \mathrm{dom}(F), F \in \mathbf{F}$.

F-odvození

$\mathbf{F}$-*odvození z* X je sekvence s taková, že pro každé $i < lh(s)$ je buď $s_i \in X$ nebo existuje $F \in \mathbf{F}$ a $i_0,\dots,i_{n-1} < i$ takové, že n je četnost F a $s_i = F(s_{i_0},\dots,s_{i_{n-1}})$. Pak s je $\mathbf{F}$-odvození z X prvku $y = (s)_{lh(s)-1}$. Prvek je $\mathbf{F}$-*odvozený z* X, existuje-li jeho $\mathbf{F}$-odvození z X.

Induktivní definice

Induktivní definice množiny Y je seznam pravidel

- Každý prvek z X je v Y.
- Pro funkci F z $\mathbf{F}$, její četnost n a $\langle y_1,\dots,y_n\rangle$ z Y^n je $F(y_1,\dots,y_n)$ v Y, jakmile $F \in \mathbf{F}$ s $\langle y_1,\dots,y_n\rangle \in \mathrm{dom}(F)$.

Důkaz indukcí

Důkaz indukcí na objektech z $\mathbf{F}\langle X\rangle$ prokazující, že každý prvek z $\mathbf{F}\langle X\rangle$ má vlastnost V, je schema:

- Každý prvek z X má vlastnost V.
- Když každé $y_1,\dots,y_n$ z $\mathbf{F}\langle X\rangle$ má vlastnost V, má $F(y_1,\dots,y_n)$ vlastnost V, jakmile $F \in \mathbf{F}$ a $\langle y_1,\dots,y_n\rangle \in \mathrm{dom}(F)$.

(Vlastnosti uzávěru a důkazu indukcí)

Tvrzení 1.1.3 *Buď $\mathbf{F}$ množina funkcí konečných četností a X množina. Pak:*

1) $\mathbf{F}\langle X\rangle = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} X_n$, *kde* $X_0 = X$ *a* $X_{n+1} = X_n \cup \mathbf{F}\lceil X\rceil$.
2) $\mathbf{F}\langle X\rangle = \{y \mid y$ *je* $\mathbf{F}$-*odvozený z* $X\}$.
3) Platí-li schema důkazu indukcí na objektech, pak má každý prvek z $\mathbf{F}\langle X\rangle$ *vlastnost* V.
4) $X' \subseteq X \Rightarrow \mathbf{F}\langle X'\rangle \subseteq \mathbf{F}\langle X\rangle$ *a* $X \subseteq \mathbf{F}\langle X\rangle = \mathbf{F}\langle\mathbf{F}\langle X\rangle\rangle$.

Obecná notace

Obecná notace je dvojice $\langle S, Ar_s\rangle$, kde $\emptyset \in S, Ar_S : S \to \mathbf{N}$. Platí, že S jsou symboly a Ar_s jejich četnosti. Konstantní symbol má četnost nulovou.

Notace

Notace je obecná notace obsahující alespoň jeden konstantní symbol.

Signatura

Signatura je dvojice $\langle \underline{R}, \underline{F} \rangle$, kde $\underline{R}$ je obecná notace s nenulovými četnostmi a její prvky jsou relační symboly. A $\underline{F}$ je obecná notace, jejíž prvky jsou funkční symboly. Notace je funkční signatura, neboli signatura, kde $\underline{R} = \emptyset$.

Struktura

Struktura je trojice $\underline{A} = \langle A, R, F \rangle$, kde A je neprázdná množina (*univerzum*), R je soubor relací konečných četností a F je soubor funkcí konečných četností. Nulární funkce se nazývá konstanta. *Kardinalita* struktury $\underline{A}$ je velikost jejího univerza, tedy $\|\underline{A}\| = |A|$.

Podstruktura

Podstruktura struktury $\underline{A} = \langle A, R, F \rangle$ je struktura $\underline{B} = \langle B, R', F' \rangle$, kde:

a) $B \subseteq A$.
b) Relace R' jsou právě tvaru $\mathrm{R} \cap B^m$ s $\mathrm{R} \in R$ a m rovným četnosti R.
c) Funkce F' jsou právě tvaru $\mathrm{F} \cap (B^n \times B)$ s $\mathrm{F} \in F$ a n rovným četnosti F.

Realizace signatury

I Realizace signatury $\langle \underline{R}, \underline{F} \rangle$ je struktura $\underline{A} = \langle A, R^A, F^A \rangle$, kde:

$$R^A = \langle R'_{\mathrm{R}} \mid \mathrm{R} \in R \rangle \quad R'_{\mathrm{R}} \subseteq A^{Ar(\mathrm{R})} \text{ je realizace R v } \underline{A} \text{ a značíme ji } \mathrm{R}^A.$$

$$F^A = \langle F'_{\mathrm{F}} \mid \mathrm{F} \in F \rangle \quad F'_{\mathrm{F}} : A^{Ar(\mathrm{F})} \to A \text{ je realizace F v } \underline{A} \text{ a značíme ji } \mathrm{F}^A.$$

Izomorfismus struktur

Nechť $\underline{A} = \langle A, R^A, F^A \rangle$ a $\underline{B} = \langle B, R^B, F^B \rangle$ jsou dvě $\langle \underline{R}, \underline{F} \rangle$-struktury. Pak zobrazení $h : A \to B$ je *izomorfismus* struktur $\underline{A}$ a $\underline{B}$, když:

a) Zobrazení h je prosté a na.
b) Pro každé $\mathrm{R} \in R$, jeho četnost n a $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in A^n$ je

$$\mathrm{R}^A(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathrm{R}^B(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$

c) Pro každou $\mathrm{F} \in F$, její četnost n a $\langle a - 1$

Obor výrazů

Obor dezignátorů

(O jednoznačnosti dezignátorů)

(O výskytech dezignátorů)

(O substituci v dezignátorech)

Hodnota dezignátoru ve struktuře