7. Logika – počty ve výrokovce *(MP únor 2010)*

Buď $|\mathbf{P}| = l$ přirozené nenulové a nechť teorie $T \subseteq VF_{\mathbf{P}}$ má model.

Neekvivalentní (kompletní) P-teorie.

Existuje 2^{2^l} neekvivalentních $\mathbf{P}$-teorií a právě 2^l kompletních neekvivalentních $\mathbf{P}$-teorií.

Všech modelů na $|\mathbf{P}| = l$ prvovýrocích je 2^l (každý prvovýrok může nabývat jedné ze dvou hodnot). Teorie je kompletní, právě když má právě jeden model. Teorie jsou neekvivalentní, když mají různé třídy modelů. Proto počet kompletních neekvivalentních $\mathbf{P}$-teorií je $\underline{2^l}$ (stačí vybrat jeden z možných modelů).

Když nemusí být teorie kompletní, může mít modelů více – a to libovolnou podmnožinu možných modelů. Takových podmnožin je $\underline{2^{2^l}}$, proto je tolik i neekvivalentních $\mathbf{P}$-teorií.

Neekvivalentní pravdivé, lživé a nezávislé výroky.

Teorie T má $2^{2^l-|M(T)|}$ neekvivalentních pravdivých a také lživých výroků a dále má $(2^{|M(T)|}-2)\cdot 2^{2^l-|M(T)|}$.

Výrok φ je pravdivý v T, neboli $T \models \varphi$, jestliže platí v každém modelu teorie T, neboli $M(T) \subseteq M(\varphi)$. Všechny neekvivalentní pravdivé výroky v T mají stejné ty modely, které má T a liší se v těch ostatních. Tedy nás zajímá, kolik je těch ostatních – tolik, co podmnožin $2^l - |M(T)|$. Proto má T $\underline{2^{2^l-|M(T)|}}$ neekvivalentních pravdivých výroků.

Výrok φ je lživý v T, jestliže $T \models \neg\varphi$, neboli $\neg\varphi$ platí v každém modelu jako T. Tedy stejnou úvahou jako v předchozím (je místo φ uvažujeme $\neg\varphi$ dojdeme ke stejnému výsledku $\underline{2^{2^l-|M(T)|}}$.

Počet všech neekvivalentních nezávislých výroků v T je počet všech – počet pravdivých – počet lživých, tedy $2^{2^l} - 2^{2^l-|M(T)|} - 2^{2^l-|M(T)|} = 2^{2^l} - 2\cdot 2^{2^l-|M(T)|} = \underline{(2^{|M(T)|}-2)\cdot 2^{2^l-|M(T)|}}$.

Neekvivalentní (kompletní) jednoduché extenze teorie.

Existuje právě $|M(T)|$ neekvivalentních kompletních jednoduchých extenzí T a $2^{|M(T)|}$ neekvivalentních jednoduchých extenzí T (z nichž jedna je sporná).

Teorie S je extenze T, jestliže $\Theta(T) \subseteq \Theta(S)$, což je právě tehdy, když $M(S) \subseteq M(T)$. S je jednoduchá extenze T, jestliže $\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}(S)$.

Extenze S teorie T tedy má některé z modelů teorie T, kterých je $|M(T)|$. Pokud má být S kompletní, tak musí mít model jediný, tedy neekvivalentních jednoduchých kompletních extenzí teorie T je $\underline{|M(T)|}$.

Pokud nemusí být S kompletní, tak si vybere libovolnou podmnožinu modelů T, tedy neekvivalentních jednoduchých extenzí T je $\underline{2^{|M(T)|}}$.

T-sémanticky neekvivalentní nezávislé výroky teorie T.

Kolik je T-sémanticky neekvivalentních nezávislých výroků teorie T?

Výroky φ a ψ jsou T-sémanticky ekvivalentní, neboli $\varphi \sim_T \psi$, jestliže

$$M(T, \varphi) = M(T, \psi),$$

neboli $M(T \cup \varphi) = M(T \cup \psi)$. Neboli $M(T) \cap M(\varphi) = M(T) \cap M(\psi)$.

Ukážeme, že dva libovolné výroky φ, ψ pravdivé v T jsou T-sémanticky ekvivalentní.

$T \models \varphi \Leftrightarrow M(T) \subseteq M(\varphi) \Rightarrow M(T, \varphi) = M(T) \cap M(\varphi) = M(T)$.

$T \models \psi \Leftrightarrow M(T) \subseteq M(\psi) \Rightarrow M(T, \psi) = M(T) \cap M(\psi) = M(T)$.

Tedy T-sémanticky neekvivalentní výrok pravdivý v T je jediný. Stejně tak lživý.

Všech T-sémanticky neekvivalentních výroků je tolik, kolik je podmnožin $M(T)$ (neboť se musí lišit právě v modelech teorie T), tedy $2^{|M(T)|}$.

Proto všech T-sémanticky neekvivalentních nezávislých výroků je $\underline{2^{|M(T)|} - 2}$.

Neekvivalentní výroky sémanticky ekvivalentní fixnímu výroku φ.

Buď $\varphi \subseteq VF_{\mathbf{P}}$. Kolik je neekvivalentních výroků ψ takových, že $\psi \sim_T \varphi$ (jsou T-sémanticky ekvivalentní φ)?

Musí tedy platit, že $M(T) \cap M(\varphi) = M(T) \cap M(\psi)$. Všechny takové výroky ψ se tedy musí shodovat v těch modelech, co má φ společné s teorií T, ale lišit se v těch ostatních. Ty, co má φ společné s T, jsou již dané. Zajímá nás tedy jen to, v kolika modelech se mohou lišit – v tolika, co je podmnožin $2^l - |M(T)|$. Proto všech neekvivalentních výroků T-sémanticky ekvivalentních φ je $\underline{2^{2^l - |M(T)|}}$.

Neekvivalentní výroky ψ, že $\psi \models \varphi$ nebo $\varphi \models \psi$.

Nechť φ je výrok. Kolik je neekvivalentních výroků ψ takových, že $\psi \models \varphi$ nebo $\varphi \models \psi$?

Neekvivalentních ψ takových, že $\psi \models \varphi \Leftrightarrow M(\psi) \subseteq M(\varphi)$ je tolik, co podmnožin $M(\varphi)$, tedy $2^{|M(T)|}$.

Neekvivalentních ψ takových, že $\varphi \models \psi \Leftrightarrow M(\varphi) \subseteq M(\psi)$ je tolik, co „nadmnožin“ $M(\varphi)$, tedy $2^{2^l - |M(T)|}$.

Neekvivalentní ψ takový, že $\psi \models \varphi$ a $\varphi \models \psi$, tedy $M(\psi) = M(\varphi)$, je jediný (neboť modely φ jsou dané a on má mít přesně ty stejné).

Proto neekvivalentních výroků ψ takových, že $\psi \models \varphi$ nebo $\varphi \models \psi$ je

$$\underline{2^{|M(T)|} + 2^{2^l - |M(T)|} - 1}$$

(jednoduchý princip inkluze a exkluze).

Neekvivelntní výroky pravdivé v teorii $\{\varphi \vee \psi\}$.

Nechť $\{\varphi, \psi\}$ nemá model. Kolik je neekvivalentních pravdivých výroků χ teorie $\{\varphi \vee \psi\}$?

Má platit $\{\varphi \vee \psi\} \models \chi$, tedy $M(\varphi \vee \psi) = (M(\varphi) \cup M(\psi)) \subseteq M(\chi)$. Zajímá nás tedy, kolik je „nadmnožin“ $M(\varphi) \cup M(\psi)$. Tolik, co podmnožin ${}^{\mathbf{P}}2 - (M(\varphi) \cup M(\psi))$, tedy $2^{2^l - |M(\varphi) \cup M(\psi)|}$.

Uvědomme si, že

$$|M(\varphi) \cup M(\psi)| = |M(\varphi)| + |M(\psi)| - |M(\varphi \cap \psi)| = |M(\varphi)| + |M(\psi)|,$$

neboť $M(\varphi) \cap M(\psi) = \emptyset$, jelikož $\{\varphi, \psi\}$ nemá dle zadání žádný model.

Tedy neekvivalentních výroků pravdivých v teorii $\{\varphi \vee \psi\}$ je $\underline{2^{2^l - |M(\varphi)| + |M(\psi)|}}$.