5. Logika – eliminace kvantifikátorů *(MP leden 2010)*

Elementární podstruktura

Struktura $\mathbf{A}$ je *elementární podstuktura* struktury $\mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \prec \mathbf{B},$$

jestliže je to podstruktura struktury $\mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$$

a pro každou formuli $\varphi(\overline{x})$ jazyka struktury $\mathbf{A}$ a $\overline{a} \in A^{l(x)}$ platí

$$\mathbf{A} \models \varphi[\overline{a}] \;\Leftrightarrow\; \mathbf{B} \models \varphi[\overline{a}].$$

Platí, že je-li $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ a φ je bezkvantifikátorová, tak $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$.

Dále platí, že pokud $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$, tak $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Modelová kompaktnost

Teorie T je *modelově kompletní*, když pro každé její dva modely $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ takové, že $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{B}$ platí $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$.

Vnoření

Funkce $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ je *(izomorfní) vnoření* $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$, je-li prostá a platí:

(e1) Pro každé $m > 0$ a každý m-ární relační symbol R jazyka L a $a_1, \ldots, a_m$ z A je $R^A(a_1, \ldots, a_m) \Leftrightarrow R^B(f(a_1), \ldots, f(a_m))$.

(e2) Pro každé $m > 0$ a každý m-ární funkční symbol F jazyka L a $a_1, \ldots, a_m$ z A je $f(F^A(a_1, \ldots, a_m)) = F^B(f(a_1), \ldots, f(a_m))$.

Elementární vnoření

Je-li $f[\mathbf{A}] \prec \mathbf{B}$, říkáme, že f je *elementární vnoření* $\mathbf{A}$ *do* $\mathbf{B}$.

Neboli vnoření $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ je elementární právě, když pro každou formuli $\varphi(\overline{x})$ jazyka struktury $\mathbf{A}$ a $\overline{a} \in A^{l(x)}$ platí

$$\mathbf{A} \models \varphi[\overline{a}] \;\Leftrightarrow\; \mathbf{B} \models \varphi[f\overline{a}].$$

Parciální vnoření $\mathbf{A}$ *do* $\mathbf{B}$ je funkce $f \subseteq A \times B$ taková, že pro každou atomickou (nebo ekvivalentně otevřenou) L-formuli $\varphi(\overline{x})$ a $\overline{a} \in \mathrm{dom}(f)^{l(x)}$ platí

$$\mathbf{A} \models \varphi[\overline{a}] \;\Leftrightarrow\; \mathbf{B} \models \varphi[f\overline{a}].$$

Parciální vnoření f lze *bezprostředně prodloužit*, když pro každé $a \in A$ existuje $b \in B$ tak, že $f \cup \{\langle a, b\rangle\}$ je parciální vnoření $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$.

Prvomodel

Model teorie T je její *algebraický prvomodel*, lze-li jej vnořit do každého modelu teorie T. Model teorie T je její *prvomodel*, lze-li jej elementárně vnořit do každého modelu teorie T.

Má-li T prvomodel $\mathbf{A}$, je $\mathrm{Th}(T) = \mathrm{Th}(\mathbf{A})$ a T je tedy kompletní, neboť každý model teorie T je elementárně ekvivalentní s $\mathbf{A}$.

TVRZENÍ 5.1.3

Má-li teorie T algebraický prvomodel a je modelově kompletní, je kompletní a její algebraický prvomodel je její prvomodel.

Eliminace kvantifikátorů

Nejmenší množina formulí obsahující množinu Γ formulí, uzavřená na $\neg$, $\&$, $\vee$ se značí $b(\Gamma)$ a její prvky se nazývají *booleovské kombinace* formulí z Γ.

Buď Γ množina L-formulí a T teorie v L. Množina Γ je *eliminační pro teorii* T, jestliže ke každé L-formuli $\varphi(\overline{x})$ s $l(\overline{x}) > 0$ existuje booleovská kombinace $\psi(\overline{x})$ formulí z Γ tak, že $T \vdash \varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x})$. Je-li Γ množina všech atomických L-formulí, říkáme, že T *má eliminaci kvantifikátorů*.

TVRZENÍ 5.2.3

Má-li T eliminaci kvantifikátorů, je modelově kompletní.

Je-li formule φ tvaru $(\exists y)\chi$, kde χ je elementární konjunkce, říkáme, že φ je *1-primitivní*.

Je-li formule φ tvaru $(\exists y)\chi$, kde χ je bezkvantifikátorová formule, říkáme, že φ je *1-existenční*.

Pokud máme $\overline{y}$ místo y, říká se, že φ je *primitivní*, resp. *existenční*.

Teorie T je *[1]-koexistenční*, když pro $\mathbf{A} \models T$, $\mathbf{B} \models T$ a neprázdné konečné parciáln ívnoření f modelu $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ a každou [1]-primitivní formuli $\varphi(\overline{x})$ s $l(\overline{x}) > 0$ a $\overline{a} \in \mathrm{dom}(f)^{l(\overline{x})}$ je

$$\mathbf{A} \models \varphi[\overline{a}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[f\overline{a}].$$

TVRZENÍ 5.2.5 *Buď T teorie.*

1) (Eliminační ekvivalent) *T má eliminaci kvantifikátorů $\Leftrightarrow$ T je koexistenční $\Leftrightarrow$ T je 1-koexistenční.*
2) (Eliminační kriterium) *Když pro každé $\mathbf{A} \models T$, $\mathbf{B} \models T$ lze každé konečné neprázdné parciální vnoření $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ bezprostředně prodloužit, má T eliminaci kvantifikátorů.*

Když pro každé $\mathbf{A} \models T$, $\mathbf{B} \models T$ lze každé konečné neprázdné parciální vnoření $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ bezprostředně prodloužit, je T 1-koexistenční.