Algebra – definice a věty

Autor: Markéta Popelová
Datum: 10.11.2010

Část první

Definice: Tzv. *n-ární operace* na množině A je zobrazení z A^n do A.

Definice: Mějme množinu symbolů Ω (někdy nazávanou *jazyk*). Pak *typ algebry* je zobrazení

$$\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup 0.$$

Definice: *Algebra* typu τ je uspořádaná dvojice $\mathcal{A} = (A, F)$, kde A je *nosná množina* (*universum*) a F je zobrazení z Ω do množiny všech operací na A takové, že symbolu ω přiřazuje $\tau(\omega)$-ární operaci $F_\omega : A^{\tau(\omega)} \to A$.

Definice: Mějme množiny A a $B \subseteq A$. Řekneme, že B je *uzavřená* na k-ární operaci $f : B^k \to B$, jestliže

$$\forall a_1, \ldots, a_k \in B : f(a_1, \ldots, a_k) \in B.$$

Definice: Algebra $\mathcal{B}$ se nazývá podalgebrou $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$), jestliže $B \subseteq A$ a B je uzavřená na všechny operace algebry $\mathcal{A}$ a operace $\mathcal{B}$ jsou restrikcemi operací algebry $\mathcal{A}$ na množinu B.

Tvrzení: Mějme algebru $\mathcal{A}$ a její podalgebry $\mathcal{B}_i$, kde $i \in I$. Pak $\bigcup_{i \in I} B_i$ je buď prázdná, nebo tvoří podalgebry algebry $\mathcal{A}$.

Tvrzení: Mějme algebru $\mathcal{A}$ a její podalgebry $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2 \leq \mathcal{B}_3 \leq \ldots$. Pak $\bigcup_{i \in I} B_i$ tvoří podalgebry $\mathcal{A}$.

Definice: Mějme algebru $\mathcal{A}$ a množinu $X \subset A$. Řekneme, že algebra $\langle X_\mathcal{A} \rangle$ je *podalgebra generovaná množinou* X, jestliže je to nejmenší podalgebra $\mathcal{A}$, která obsahuje X.

Tvrzení: Je-li $\emptyset \neq X \subseteq A$, pak $\langle X_\mathcal{A} \rangle$ existuje.

Definice: *Direktní součin* algeber $\mathcal{A}_i = (A_i, F_i)$ pro $i = 1, \ldots, n$ stejného typu je algebra

$$\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n = (A_1 \times \cdots \times A_n, F),$$

jejíž k-ární operace $f : (A_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n)^k \to A_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$ je definována předpisem:

$$f((a_1^1, \ldots, a_n^1), \ldots, (a_1^k, \ldots, a_n^k)) = (f_1(a_1^1, \ldots, a_1^k), \ldots, f_n(a_n^1, \ldots, a_n^k)),$$

kde $f_i : A_i \to A$ je příslušné k-ární zobrazení.

Definice: Mějme $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ algebry stejného typu. Pak zobrazení $\varphi : A \to B$ se nazývá *homomorfismus* algeber $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ($\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$), pokud pro každou k-ární operaci f algebry $\mathcal{A}$ a odpovídající operaci g algebry $\mathcal{B}$ platí:

$$\forall a_1, \ldots, a_k \in A : \varphi(f(a_1, \ldots, a_k)) = g(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_k)).$$

Definice: *Monomorfismus (vnoření)* je homomorfismus, který je prostý ($\hookrightarrow$).

Definice: *Epimorfismus* je homomorfismus, který je na ($\twoheadrightarrow$).

Definice: *Izomorfismus* je homomorfismus, který je bijektivní ($\simeq$).

Definice: *Endomorfismus* algebry $\mathcal{A}$ je homomorfismus z $\mathcal{A}$ do $\mathcal{A}$.

Definice: *Automorfismus* algebry $\mathcal{A}$ je izomorfismus z $\mathcal{A}$ na $\mathcal{A}$.

Definice: Buď $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfismus. Pak

- *Jádro* homomorfismu φ je $ker(\varphi) = \{(a, b) \in A \times A \mid \varphi(a) = \varphi(b)\}$.
- *Obraz* homomorfismu φ je $Im(\varphi) = \{b \in B \mid \exists a \in A : \varphi(a) = b\}$.

Tvrzení: Buď $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfismus. Pak:

- $ker(\varphi)$ je ekvivalence na množině A.
- $Im(\varphi)$ tvoří podalgebru algebry $\mathcal{B}$.

Tvrzení: Mějme $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ algebry stejného typu a mezi nimi homomorfismy $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ a $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$. Pak:

- Složené zobrazení $\psi \circ \varphi$ je homomorfismus $\mathcal{A} \to C$.
- Je-li φ izomorfismus, pak inverzní zobrazení φ^{-1} je izomorfismus $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$.

Definice: Mějme algebry $\mathcal{A}, B$. Pak *invariant* je vlastnost V taková, že $\mathcal{A}$ má vlastnost V a $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$ má vlastnost V.

Tvrzení: Jakákoliv uzavřená formule v jazyce dvou algeber je invariant.

Definice: *Absolutně volná algebra* typu τ nad množinou X (neboli *algebra termů nad* X) je $\mathcal{F}_\tau(X) = (\{$ všechny termy v jazyce τ s proměnnými z $X\}, F)$. Kde f je k-ární operace ($f \in F$), jestliže termům $t_1, \ldots, t_k$ přiřadí term $f(t_1, \ldots, t_k)$.

Definice: Mějme množinu A relaci na ni $\sim \subseteq A \times A$. Pak $\sim$ je *ekvivalence*, jestliže:

1. $\forall a \in A : a \sim a$ ($\sim$ je *reflexivní*),
2. $\forall a, b \in A : a \sim b \Rightarrow b \sim a$ ($\sim$ je *symetrická*),
3. $\forall a, b, c \in A : a \sim b \ \& \ b \sim c \Rightarrow a \sim c$ ($\sim$ je *tranzitivní*).

Definice: Mějme množinu A, prvek $a \in A$ a relaci ekvivalenci $\sim$ na A. Pak *blok ekvivalence* (neboli *třída ekvivalence*) je množina

$$[a]_\sim = \{b \in A \mid a \sim b\}.$$

Bloky ekvivalnce tvoří (disjunktní) *rozklad* množiny A. Množinu všech bloků ekvivalence $\sim$ značíme

$$A/_\sim = \{[a]_\sim \mid a \in A\}.$$

Definice: Mějme algebru $\mathcal{A}$ a ekvivalenci $\sim$ na A. Pak $\sim$ je *kongruence*, jestliže pro každou k-ární operaci f algebry $\mathcal{A}$ platí

$$\forall a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \ : \ a_1, \sim b_1, \ldots, a_k \sim b_k \Rightarrow f(a_1, \ldots, a_k) \sim f(b_1, \ldots, b_k).$$

Definice: Mějme algebru $\mathcal{A} = (A, F)$ a kongruenci $\sim$ na A. Pak *faktoralgebra* algebry $\mathcal{A}$ podle kongruence $\sim$ je $\mathcal{A}/_\sim = \{A/_\sim, G\}$, kde G je množina operací takových, že pro každou k-ární operaci $f \in F$ definujeme k-ární operaci $g \in G$, že

$$\forall a_1, \ldots, a_k \in A : g([a_1], \ldots, [a_k]) = [f(a_1, \ldots, a_k)].$$

Tvrzení: Nechť $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je homomorfismus. Pak $ker(\varphi)$ je kongruence na $\mathcal{A}$.

Tvrzení: Nechť $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je homomorfismus. Pak

$$\mathcal{A}/_{ker(\varphi)} \simeq \underline{Im(\varphi)}.$$