1. Matematická analýza – věty 1. *(MP leden 2010)*

Věty a výsledky bez důkazů

1. *Uveďte vlastnosti otevřených a uzavřených množin v metrickém prostoru a topologickou charakterizaci spojitosti zobrazení mezi metrickými prostory (T.1.1-T.1.3).*

   Tvrzení 1.1 Nechť (M, d) je metrický prostor. Pak $\emptyset$ a M jsou otevřené i uzavřené množiny. Sjednocení libovolně mnoha otevřených množin je otevřená množina. Průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina. Sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina. Průnik libovolně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.

   Tvrzení 1.2 Nechť (M, d) je metrický prostor. Pak $X \subset M$ je uzavřená, právě když limita každé konvergentní posloupnosti (a_n) v X leží také v X.

   Tvrzení 1.3 Nechť (M_1, d_1) a (M_2, d_2) jsou metrické prostory a $f : M_1 \to M_2$ je zobrazení mezi nimi. Pak f je spojité právě tehdy, když vzor každé otevřené množiny v M_2 je otevřená množina v M_1.

   $$V \subset M_2 \text{ otevřená } \Rightarrow f^{-1}(V) = \{x \in M_1 \mid f(x) \in V\} \text{ otevřená v } M_1.$$

2. *Uveďte výsledky o kompaktních množinách v metr. prostoru (T.1.4-V.1.8).*

   Tvrzení 1.4 Kompaktnost se zachovává následujícími operacemi.

   1. Přechodem k uzavřenému podprostoru.
   2. Obrazem spojitým zobrazením.
   3. Kartézským součinem.

   Tvrzení 1.5 Kompaktní množiny v (M, d) jsou uzavřené a omezené.

   Věta 1.6 Uzavřené a omezené podmnožiny euklidovského prostoru R^n jsou kompaktní.

   Věta 1.7 Nechť (M_1, d_1) a (M_2, d_2) jsou metrické prostory a $f : M_1 \to M_2$ je spojité zobrazení mezi nimi, přičemž M_1 je kompaktní.

   1. Je-li $M_2 = \mathbf{R}$ jednorozměrný euklidovský prostor, pak nabývá f na M_1 maxima i minima.
   2. Je-li f navíc bijekce, pak inverzní zobrazení f^{-1} je také spojité.
   3. Zobrazení f je dokonce stejnoměrně spojité.

   Věta 1.8 Množina v metrickém prostoru je kompaktní právě když je topologicky kompaktní.

3. *Uveďte výsledky o úplných metr. prostorech (T.1.9 a V.1.10).*

Tvrzení 1.9 Úplnost metrického prostoru se zachovává následujícími operacemi:

1. Přechodem k uzavřenému podprostoru.
2. Obrazem stejnoměrným spojitým prostým zobrazením, pokud je i inverzní zobrazení stejnoměrně spojité.
3. Kartézským součinem.

Věta 1.10 (Banachova věta o pevném bodu) Kontrahující zobrazení metrického prostoru (M, d) zobrazení sama do sebe má právě jeden pevný bod a každá posloupnost iterací $(x_n) \subset M$ k němu konverguje.

4. *Uveďte kritéria stejnoměrné konvergence posloupností a řad funkcí (T. 2.1-2.2, V. 2.7-2.8).*

Tvrzení 2.1 (Bolzanova - Cauchyova (stejnoměrná) podmínka) Posloupnost funkcí (f_n) konverguje na množině M stejnoměrně k nějaké funkci f právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbf{N} \; : \; m, n > n_0, \; x \in M \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Tvrzení 2.2

1. Když $f_n \overbrace{\Rightarrow}^{loc} f$ na (a, b) pro $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, potom $f_n \Rightarrow f$ na $[c, d]$ pro každý kompaktní podintevral $[c, d] \subset (a, b)$.
2. (**Diniho věta**) Nechť $f_n \to f$ na kompaktním intervalu I, funkce f_n i f jsou spojité a konvergence je monotónní. Pak $f_n \Rightarrow f$ na I.

Věta 2.7 (Kritéria stejnoměrné konvergence řad)

1. (**Weierstrassovo kriterium**) Nechť $f_n : M \to \mathbf{R}$ pro $n = 1, 2, \dots$ jsou nezáporné funkce takové, že řada nezáporných čísel
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in M} |f_n(x)|$$
konverguje. Pak
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Rightarrow \text{ na } M.$$

2. (**Důsledek Diniho věty**)Jsou-li funkce $f_n : [a,b] \to \mathbf{R}$ na kompaktním intervalu $[a,b]$ spojité a nezáporné a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to f$ na $[a,b]$, kde f je též spojitá, potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows \text{ na } [a,b].$$

5. *Uveďte věty o záměně pořadí operace limity s dalšími operacemi pro posloupnosti a řady funkcí (V. 2.3-2.5 a jejich verze pro řady).*

Věta 2.3 (Moore–Osgoodova) Nechť f_n a f jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí $M = P(x_0, \delta)$ bodu $x_0 \in \mathbf{R}^*$ a existují vlastní limity

$$a_n = \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$

a nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $P(x_0, \delta)$. Potom existují a rovnají se i vlastní limity

$$\lim_{n \to \infty} a_n \quad a \quad \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Věta 2.4 Nechť f_n pro $n = 1, 2, \dots$ a f jsou definované na intervalu $[a,b]$, $f_n \in R[a,b]$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$. Pak i $f \in R[a,b]$ a

$$\int_a^b f = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n.$$

Věta 2.5 Nechť $f_n : (a,b) \to \mathbf{R}$ pro $n = 1, 2, \dots$ je posloupnost funkcí definovaná na omezeném otevřeném intervalu (a,b). Nechť každá f_n má vlastní derivaci na (a,b) a $f_n' \overbrace{\rightrightarrows}^{loc} g$ na (a,b). Nechť ještě posloupnost čísel $(f_n(x_0))$ konverguje pro alespoň jeden bod $x_0 \in (a,b)$. Potom $f_n \overbrace{\rightrightarrows}^{loc} f$ na (a,b) pro nějakou funkci $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ a $f' = g$ na (a,b).

6. *Uveďte výsledky o mocninných řadách (V. 2.9, T. 2.10, V. 2.11).*

Věta 2.9 (O poloměru konvergence mocninné řady) Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je mocninná řada a $R \in [0, \infty) \cup \{+\infty\}$ definované vztahem

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} \qquad (\text{kde } \frac{1}{\infty} = 0 \text{ a } \frac{1}{0} = \infty).$$

Potom pro každé $x \in \mathbf{R}$ s $|x| < R$ mocninná řada absolutně konverguje a pro každé $x \in \mathbf{R}$ s $|x| > R$ mocninná řada diverguje.

Věta 2.10 (lokálně stejnoměrná konvergence mocninné řady) Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má poloměr konvergence $R > 0$. Potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \overbrace{\Rightarrow}^{loc} \text{ na } (-R, R).$$

A mocninná řada konverguje stejnoměrně na každém kompaktním podintervalu $[c, d] \subset (-R, R)$.

Věta 2.11 (Abelova věta o mocninné řadě) Nechť má $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konečný kladný poloměr konvergence R a číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konverguje. (Čili mocninná řada konverguje pro $x = R$.) Potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow \text{ na } [0, R] \quad \text{a} \quad \lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

7. *Uveďte výsledky o Fourierových řadách (T. 2.12, V. 2.13-2.15).*

Tvrzení 2.12 (Ortogonální systém sinů a cosinů) Pro každé dvě čísla $m, n \in \mathbf{N_0}$ máme $< \sin(mx), \cos(nx) >= 0$. Pro každá dvě čísla $m, n \in \mathbf{N_0}$, pokud nejsou současně nulová, máme

$$< \sin(mx), \sin(nx) >=< \cos(mx), \cos(nx) >= \begin{cases} \pi & \text{pro } m = n \\ 0 & \text{pro } m \neq n. \end{cases}$$

Pro $m = n = 0$ máme $< \sin(0x), \sin(0x) >= 0$ a $< \cos(0x), \cos(0x) >= 2\pi$.

Věta 2.13 (Besselova nerovnost a Riemannovo–Lebesgueovo lemma) Nechť $f \in R[-\pi, \pi]$ a čísla $a_0, a_1, \ldots$ a $b_1, b_2, \ldots$ jsou Fourierovy koeficienty funkce f.

1. (**Besselova nerovnost**) Platí nerovnost

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a^2 + b^2) \leq \frac{< f, f >}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2.$$

2. (**Riemannovo–Lebesgueovo lemma**) Platí

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Věta 2.14 (Věta o bodové konvergenci Fourierovy řady) Nechť funkce $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je 2π-periodická a její zúžení na interval $[-\pi, \pi]$ je po částech hladké. Její Fourierova řada pak na $\mathbf{R}$ bodově konverguje k funkci

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Kde

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a+0) \quad \text{a} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a-0).$$

V každém bodu spojitosti x funkce f tedy její Fourierova řada konverguje k číslu $f(x)$.

Věta 2.15 (O stejnoměrné konvergenci Fourierovy řady) Nechť funkce $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je 2π-periodická a její zúžení na interval $[-\pi, \pi]$ je po částech hladké. Nechť je navíc f spojitá na $\mathbf{R}$. Pak je f na $\mathbf{R}$ stejnoměrným součtem své Fourierovy řady.

8. *Uveďte vlastnosti komplexní exponenciály (T. 4).*

Tvrzení 4 (Vlastnosti exponenciály) Funkce $\exp(z)$ má tyto vlastnost:

1. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ je $\exp(z)' = \exp(z)$. Neboli exponenciála se rovná své derivaci.
2. Pro každé $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ je $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$. Neboli exponenciála převádí sčítání na násobení.
3. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ je $\exp(z) \neq 0$.
4. Pro každé $a \in \mathbf{R}$ je $\exp(ai) = cis(a) = \cos(a) + i\sin(a)$.
5. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ je $|\exp(z)| = \exp(Re(z))$.
6. Pro každé nenulové $u \in \mathbf{C}$ má rovnice $\exp(z) = u$ nekonečně mnoho řešení $z \in \mathbf{C}$, která se vzájemně liší o celočíselné násobky čísla $2\pi i$.

9. *Uveďte hlavní výsledky o holomorfních funkcích (V. 5, 7 a 8).*

Věta 5 (Hlavní, holomorfnost je totéž co analytičnost) Nechť $X \subset \mathbf{C}$ je otevřená a $f : X \to \mathbf{C}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Funkce f je na X holomorfní.
2. Funkce f je na X analytická.
3. Funkce f je na X globálně analytická.

Věta 6 (Jednoznačnost koeficientů mocninné řady)
Nechť $M = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a $N = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ jsou mocnnné řady a (z_n) je prostá posloupnost komplexních čísel konvergujících k 0, která leží v disku konvergence M i N. Pokud pro každé n je $M(z_n) = N(z_n)$, potom pro každé n je $a_n = b_n$.

Věta 7 (Jednoznačnost holomorfního rozšíření) Holomorfní rozšíření na souvislou množinu je jednoznačné.

Podrobně řečeno, je-li $Y \subset \mathbf{C}$ otevřená a souvislá množina (tj. každé dva body Y lze spojit lomennou čarou ležící v Y) a $g_1, g_2 : Y \to \mathbf{C}$ jsou dvě holomorfní funkce splňující $g_1(x) = g_2(x)$ pro každé $x \in X$ z nějaké otevřené podmnožiny $X \subset Y$, potom už $g_1(u) = g_2(u)$ pro každé $y \in Y$.

10. *Ještě navíc pro doplnění první tvrzení v komplexní analýze.*

Tvrzení Nechť

$$\{1, 2, \ldots\} = \bigcup_{i=1}^{k} \{a_i + d_i n \mid n = 1, 2, \ldots\} \quad \text{a} \quad a_i, d_i \in \mathbf{N},$$

je takový rozklad množiny $\mathbf{N}$, že každé přirozené číslo leží v jedniné z k aritmetických posloupností a $k \geq 2$. Potom $d_i = d_j$ pro nějaké dva indexy $i = j$, takže se některé dvě diference rovnají.