1. Matematická analýza – definice *(MP leden 2010)*

Základní pojmy a definice

1. Definujte metrický prostor, otevřené a uzavřené množiny, hraniční bod množiny.

   * *Metrický prostor* je dvojice (M, d), kde M je množina bodů a $d : M \times M \to \mathbf{R}$ funkce dvou proměnných zvaná *metrika*, která splňuje 3 axiomy:

     1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
     2) $d(x, y) = d(y, x)$
     3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

   * Buď (M, d) metrický prostor, $a \in M$ a $r > 0$ reálné číslo. Pak *otevřená koule se středem v a a poloměrem r* je

     $$B(a, r) = \{x \in M \mid d(a, x) < r\}.$$

     Utevřená koule se středem v a a poloměrem r je

     $$\overline{B(a, r)} = \{x \in M \mid d(a, x) \leq r\}.$$

   * Množina $X \subset M$ je *otevřená*, pokud

     $$\forall a \in X \quad \exists r > 0 \ : \ B(a, r) \subset X.$$

   * Množina $X \subset M$ je *uzavřená*, pokud její doplněk $M \setminus X$ je otevřená množina.
   * Bod $a \in M$ je *hraniční* bod množiny $X \subset M$, pokud každé okolí bodu a (otevřená množina v M obsahující bod a) protíná X i $M \setminus X$.

2. Definujte limitní bod množiny, izolovaný bod množiny, uzávěr množiny.

   * Bod $a \in M$ je *limitní* bod množiny $X \subset M$, pokud každé jeho okolí U má nekončný průnik s množinou X (neboli množina $U \cap X$ je nekonečná).
   * Bod $a \in M$ je *izolovaný* bod množiny $X \subset M$, pokud existuje okolí U, že $U \cap X = \{a\}$.
   * *Uzávěr* množiny $X \subset M$ je množina

     $$\overline{X} = \{a \in M \mid a = \lim_{n\to\infty} a_n \text{pro nějakou} (a_n) \subset X\}.$$

     Je to právě množina $X \cup$ limitní body X.

3. Definujte spojité zobrazení mezi metrickými prostory a homeomorfismus.

   * Nechť (M_1, d_1) a (M_2, d_2) jsou metrické prostory a $f : M_1 \to M_2$ je zobrazení mezi nimi. Pak f je spojité v bodě $a \in M_1$, jestliže

   $$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

     Zobrazení f je spojité, když je spojité v každém bodu prostoru M_1.
   * Heineho definice spojitosti f v a:

$$f \text{ je spojité v } a \Leftrightarrow \left(\forall (a_n)(\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ a } \forall n \; a_n \neq a) \Rightarrow (\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a))\right).$$

   * Bijekce $f : M_1 \to M_2$ mezi metrickými prostory je *homeomorfismus*, když zobrazení f i inverzní zobrazení f^{-1} jsou spojitá. Pokud taková bijekce existuje, oba metrické prostory jsou *homeomorfní*.

4. Podejte obě definice kompaktního metrického prostoru, resp. kompaktní množiny v metrickém prostoru.

   * Metrický prostor je *kompaktní*, když má každá posloupnost bodů $(a_n) \subset M$ konvergentní podposloupnost.
   * Množina $X \subset M$ je *kompaktní*, když je podprostor (X, d) s indukovanou metrikou kompaktní. (Neboli každá posloupnost bodů $(a_n) \subset X$ má konvergentní podposloupnost s limitou v X.
   * Množina v metrickém prostoru je kompaktní, právě když je topologicky kompaktní.
   * Množina $X \subset M$ je *topologicky kompaktní*, když každé její otevřené pokrytí má konečné podpokrytí.
   * Pro množinu X nazveme systém množin $\{O_i \mid i \in I\}$ v M jejím *otevřeným pokrytím*, když jsou všechny množiny O_i otevřené a $X \subset \bigcup_{i\in I} O_i$.
   * *Konečné pokrytí* je konečný systém $\{O_j \mid j \in J\}$, kde $J \subset I$ je konečná a který pokrývá X.

5. Definujte úplný metrický prostor a kontrahující zobrazení mezi metrickými prostory.

   * Metrický prostor (M, d) je *úplný*, když každá cauchyovská posloupnost bodů v M konverguje.
   * Posloupnost bodů (a_n) v M je *cauchyovská*, když

   $$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbf{N} \; : \; m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

* Zobrazení $f : M \to M$ metrického prostoru (M, d) sama do sebe je *kontrahující*, když pro nějaké číslo $q \in \mathbf{R}$ splňující $0 < q < 1$ pro každé dva body $x, y \in M$ platí

$$d(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x, y).$$

* *Pevným bodem* zobrazení f množiny X sama do sebe rozumíme bod $a \in X$, že $f(a) = a$.
* Posloupnost bodů $(x_n) \subset X$ je *posloupnost iterací* zobrazení $f : X \to X$, když pro $n = 1, 2, \ldots$ platí, že $x_{n+1} = f(x_n)$ a x_1 je libovolný bod z X.

6. Vysvětlete typy konvergence posloupností a řad funkcí.

* Posloupnost funkcí (f_n) *bodově konverguje* k funkci f na M

$$f_n \to f \text{ na } M,$$

když pro každé $x \in M$ platí

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

Neboli

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall x \in M \;\; \exists n_0 \in \mathbf{N} \; : \; n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

* Posloupnost funkcí (f_n) *stejnoměrně konverguje* k f na M

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } M,$$

když

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbf{N} \; : \; n > n_0, \; x \in M \Rightarrow |f_n(x) - f)x)| < \varepsilon.$$

* Posloupnost funkcí (f_n) *lokálně stejnoměrně konverguje* k f na M

$$f_n \overbrace{\rightrightarrows}^{loc} f \text{ na } M,$$

když každé $x \in M$ má okolí $U = (x - \delta, x + \delta)$ (kde δ může záviset na x), že $f_n \rightrightarrows f$ na $U \cap M$.
* Mějme pro funkce $f_n : M \to \mathbf{R}$ nekonečnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

funkcí definovanou jako posloupnost částečných součtů

$$(s_n) = (f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3, \ldots).$$

* Řada *bodově* konverguje na M, když $(s_n) \to f$ na M.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to f \text{ na } M$$

* Řada *stejnoměrně konverguje* na M, když $(s_n) \rightrightarrows f$ na M.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f \text{ na } M$$

* Řada *lokálně stejnoměrně* konverguje na M, když $(s_n) \overbrace{\rightrightarrows}^{loc} f$ na M.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overbrace{\rightrightarrows}^{loc} f \text{ na } M$$

7. Definujte mocninnou řadu a poloměr konvergence (v reálném oboru).

* *Mocninnou řadou* rozumíme nekonečnou řadu funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Čísla $s_n \in \mathbf{R}$ jsou *koeficienty* a číslo $x_0 \in \mathbf{R}$ je *střed* mocninné řad. Pro jednoduchost se omezme na řady se středem v nule.

* *Poloměr konvergence* mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je číslo $R \in [0, \infty) \cup \{+\infty\}$ definované

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}.$$

* Interval $(-R, R)$ se nazývá *interval konvergence*.

8. Definujte trigonometrickou řadu, Fourierovy koeficienty funkce a Fourierovu řadu funkce.

   * *Trigonometrickou řadou* rozumíme nekonečnou řadu funkcí

   $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

   kde $a_0, a_1, \ldots$ a $b_1, b_2, \ldots$ jsou pevně dané reálné koeficienty a x je reálná proměnná.
   * *Fourierovy koeficienty* $a_0, \ldots$ a $b_1, \ldots$ funkce $f \in R[-\pi, \pi]$ (tzn. Riemannovsky integrovatelné na $[-\pi, \pi]$) jsou definovány

   $$a_n = \frac{< f, \cos(nx) >}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{dx}, \quad \text{pro } n = 0, 1, 2, \ldots$$

   $$b_n = \frac{< f, \sin(nx) >}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{dx}, \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

   * *Fourierovou řadou* funkce $f \in R[-\pi, \pi]$ rozumíme trigonometrickou řadu, jejíž koeficienty a_n a b_n jsou rovny Fourierovým koeficientům funkce f.

9. Vysvětlete pojem po částech hladké funkce.

   * Funkce $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ je na intervalu $[a, b]$ *po částech hladká*, když existuje konečná množina $A \subset [a, b]$ taková, že f má na množině $[a, b] \setminus A$ spojitou první derivaci f' a v každém bodu $a \in A$ má f i její derivace f' jednostranné limity.
   * Jednostranné limity označme

   $$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a + 0) \quad \text{a} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a - 0).$$

   * Neboli f je na $[a, b]$ po částech hladká, když existuje dělení $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k = b$ intervalu $[a, b]$ takové, že f má na každém intervalu (a_i, a_{i+1}) spojitou první derivaci (i f je na tomto intervalu tedy spojitá) a v dělících bodech existují vlastní jednostranné limity $f(a_i + 0)$, $f(a_i - 0)$, $f'(a_i + 0)$, $f'(a_i - 0)$. (Existence prvních dvou plyne z druhých dvou a Lagrangovy věty o střední hodnotě.)
   * Pokud je f po částech hladká na $[a, b]$, tak její Fourierova řada bodově konverguje. V bodech spojitosti konverguje k funkční hodnotě a v dělících bodech a_i k aritmetickém průměru jednostranných limit.

10. Definujte holomorfní funkci a analytickou funkci.

  * Nechť $z_0 \in X \in \mathbf{C}$, množina X je otevřená a $f : X \to \mathbf{C}$. Má-li f v z_0 derivaci, řekneme, že funkce f je *holomorfní v bodě* z_0.
  * Má-li f derivaci v každém bodě množiny X, řekneme, že f je *holomorfní na množině* X.
  * *Celá* či *celistvá* funkce je funkce holomorfní na celém $\mathbf{C}$.
  * Množinu $D(z_0, R) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < R\}$ nazýváme *diskem konvergence mocninné řady* M. Je to otevřený kruh se středem v z_0 a poloměrem R.
  * Nechť $z_0 \in X \subset \mathbf{C}$ s otevřenou množinou X a $f : X \to \mathbf{C}$. Když existuje $r > 0$, že $D(z_0, r) \subset X$ a f se dá na disku $D(z_0, r)$ vyjádřit mocninnou řadou se středem v z_0, řeknemě, že f je *analytická na* X.
  * Když se pro každé $z_0 \in X$ a každé takové $r > 0$, že $D(z_0, r) \subset X$, dá f vyjádřit na disku $D(z_0, r)$ mocninnou řadou se středem v z_0, řekneme, že f je *globálně analytická*.

11. Definujte pojem holomorfního rozšíření a singularity.

  * Jsou-li $X \subset Y \subset \mathbf{C}$ dvě otevřené množiny a $f : X \to \mathbf{C}, g : Y \to \mathbf{C}$ holomorfní funkce splňující $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in X$, řekneme, že g je *holomorfní rozšíření funkce* f *(na množinu* Y*)*.
  * Nechť $z(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ má poloměr konvergence R, že $0 < R < +\infty$ tak, že $f : D(0, R) \to \mathbf{C}$ je holomorfní funkce. Řekneme, že bod $u \in \mathbf{C}$ na konvergenční kružnici, tj. $|u| = R$, je *singularita funkce* f, když neexistuje holomorfní rozšíření f na žádné jeho okolí.
  * To jest, pro žádné $\delta > 0$ neexistuje holomrfní rozšíření f z $D(0, R)$ na $D(0, R) \cup D(u, \delta)$.